Über das Finden von Integralen, wenn nach der Integration der variablen Grösse ein bestimmter Wert zugeteilt wird*

Leonhard Euler

Lemma

§1 *Die Summe der rekurrenten Reihe*

$$A + B + C + D + \cdots + P$$

zu finden, in welcher jeder Term aus den zwei vorhergehenden so gebildet wird, dass gilt

$$C = mB + nA, \quad D = mC + nB \quad etc.$$

Lösung

Damit sich die Lösung weiter erstreckt, wollen wir die einzelnen Terme mit den Termen der geometrischen Reihe multiplizieren, dass wir diese Reihe haben

*Originaltitel: "De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur", zuerst publiziert in: *Miscellanea Berolinensia, Band* 7 (1743, verfasst 1742): pp. 129–171, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Volume 17, pp. 35 – 69, Eneström-Nummer E60, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & p & \\ Ax^{\alpha}+ & Bx^{\alpha+\beta}+ & Cx^{\alpha+2\beta} + & Dx^{\alpha+3\beta} + & \cdots + & Px^{\alpha+(p-1)\beta}. \end{array}$$

Wir wollen die Summe dieser Reihe $= S$ setzen, dass

$$S = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \cdots + Px^{\alpha+(p-1)\beta}$$

ist. Daher wird, nachdem das Gesetz der Progression ins Kalkül gezogen worden ist,

$$\begin{aligned} mSx^{\beta} &= mAx^{\alpha+\beta} + mBx^{\alpha+2\beta} + \cdots + mOx^{\alpha+(p-1)\beta} + mPx^{\alpha+p\beta}, \\ nSx^{2\beta} &= \qquad\qquad nAx^{\alpha+2\beta} + \cdots + nNx^{\alpha+(p-1)\beta} + nOx^{\alpha+p\beta} + nPx^{\alpha+(p+1)\beta} \end{aligned}$$

sein; man subtrahiere diese zwei Reihen zusammen von der oberen und wegen

$$C = mB + nA, \quad D = mC + nB, \quad \cdots P = mO + nN$$

wird man

$$\begin{gathered} S(1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}) \\ = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} - mAx^{\alpha+\beta} - mPx^{\alpha+p\beta} - nOx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta} \end{gathered}$$

haben. Es sei in der vorgelegten Reihe $A + B + C + D + \cdots + P$ der dem letzten Term P folgende Term $= Q$; es wird $Q = mP + nO$ sein, nach Einführen von welchem

$$S = \frac{Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} - mAx^{\alpha+\beta} - Qx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}}{1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}}$$

werden wird. Oder wenn in der Reihe $A + B + C + \cdots + P$ der dem ersten Term A vorausgehende Term $= \Delta$ genannt wird, wird wegen $B = mA + n\Delta$ die gesuchte Summe

$$S = \frac{Ax^{\alpha} + n\Delta x^{\alpha+\beta} - Qx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}}{1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}}$$

werden. Für $x = 1$ gesetzt wird die Summe der vorgelegten Reihe $A + B + C + \cdots + P$

$$= \frac{A + n\Delta - Q - nP}{1 - m - n}$$

sein.
Q. E. I.

LEMMA 2

§2 *Während $A + B + C + D + \cdots + P$ eine rekurrente Reihe ist, in welcher*

$$C = mB + nA, \quad D = mC + nB \quad \textit{etc.}$$

ist, die Summe dieser Reihe zu finden

$$\alpha A + (\alpha + \beta)B + (\alpha + 2\beta)C + \cdots + (\alpha + (p-1)\beta)P.$$

LÖSUNG

Wir wollen diese sich weiter erstreckende Reihe betrachten

$$S = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \cdots + Px^{\alpha+(p-1)\beta},$$

deren Summe wir zuvor gefunden haben

$$S = \frac{Ax^{\alpha} + n\Delta x^{\alpha+\beta} - Qx^{\alpha+p\beta} - nPx^{\alpha+(p+1)\beta}}{1 - mx^{\beta} - nx^{2\beta}}$$

zu sein, während Δ den dem ersten A vorausgehenden Term und Q den dem letzten P folgenden Term in der Reihe $A + B + C + D + \cdots + P$ bezeichnet. Wenn nun diese Reihe, deren Summe wir $= S$ gesetzt haben, nach x differenziert wird, wird

$$\frac{dS}{dx} = \alpha Ax^{\alpha-1} + (\alpha + \beta)Bx^{\alpha+\beta-1} + \cdots + (\alpha + (p-1)\beta)Px^{\alpha+(p-1)\beta-1}$$

sein, aber aus dem zuvor gefundenen Wert der Summe S wird

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\left\{\begin{array}{c} \alpha A x^{\alpha-1} + m(\beta-\alpha)Ax^{\alpha+\beta-1} + n(2\beta-\alpha)Ax^{\alpha+2\beta-1} \\ +n(\beta+\alpha)\Delta - mn\alpha\Delta + nn(\beta-\alpha)\Delta x^{\alpha+3\beta-1} \\ -(\alpha+p\beta)Qx^{\alpha+p\beta-1} + m(\alpha+(p-1)\beta)Qx^{\alpha+(p+1)\beta-1} + n(\alpha+(p-2)\beta)Qx^{\alpha+(p+2)\beta-1} \\ -n(\alpha+(p+1)\beta)P + mn(\alpha+p\beta)P \\ +nn(\alpha+(p-1)\beta)Px^{\alpha+(p+3)\beta-1} \end{array}\right\}}{(1-mx^\beta-nx^{2\beta})^2}$$

sein. Man setze nun $x=1$ und die Summe der vorgelegten Reihe

$$\alpha A + (\alpha+\beta)B + (\alpha+2\beta)C + \cdots + (\alpha+(p-1)\beta)P$$

wird diese sein

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c} (1-m-n)\alpha A + (m+2n)\beta A + n(1-m-n)\alpha\Delta + n(1+n)\beta\Delta \\ -(1-m-n)\alpha Q - p(1-m-n)\beta Q - (m+2n)\beta Q - n(1-m-n)^2\alpha P \\ -np(1-m-n)\beta P - n(1+n)\beta P \end{array}\right\}}{(1-m-n)^2}.$$

Oder diese Summe ist

$$\frac{\alpha A + n\alpha\Delta - (\alpha+p\beta)Q - n(\alpha+p\beta)P}{1-m-n}$$
$$+\frac{(m+2n)\beta A + n(1+n)\beta\Delta - (m+2n)\beta Q - n(1+n)\beta P}{(1-m-n)^2}.$$

Q.E.I.

KOROLLAR 1

§3 Diese Summe dieser Reihe

$$A + 2B + 3C + 4D + \cdots + pP$$

wird

$$= \frac{A + n\Delta - (1+p)Q - n(1+p)P}{1-m-n} + \frac{(m+2n)(A-Q) + n(1+n)(\Delta - P)}{(1-m-n)^2}$$

sein, während $A + B + C + D + \cdots + P$ eine rekurrente Reihe ist, deren Indizes m und n sind.

KOROLLAR 2

§4 In gleicher Weise wird die Summe dieser Reihe

$$A + 3B + 5C + 7D + \cdots + (2p-1)P$$

diese sein

$$= \frac{A + n\Delta - (2p+1)Q - n(2p+1)P}{1-m-n} + \frac{2(m+2n)(A-Q) + 2n(1+n)(\Delta - P)}{(1-m-n)^2}.$$

PROBLEM 1

§5 *Die Summe der Sinus von in einer beliebigen arithmetischen Progression fortschreitenden Winkel zu finden.*

LÖSUNG

Die Winkel, deren Summe von Sinus gesucht wird, mögen diese Progression bilden

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & p \\ s, & s+u, & s+2u, & s+3u, & s+(p-1)u; \end{array}$$

also wird die zu summierende Reihe diese sein

$$\sin s + \sin(s+u) + \sin(s+2u) + \cdots + \sin(s+(p-1)u).$$

Diese Progression ist in der Tat eine rekurrente Reihe, deren Indizes $2\cos u$, -1 sind, nachdem die Einheit für den ganzen Sinus genommen worden ist; daher wird nach Anwenden von Lemma 1 hier $m = 2\cos u$ und $n = -1$

sein. Weiter wird $A = \sin s$, $P = \sin(s + (p-1)u)$, $Q = \sin(s + pu)$ und $\Delta = \sin(s-u)$ sein. Daher wird die Summe der vorgelegten Reihe der Sinus

$$= \frac{\sin s - \sin(s-u) - \sin(s+pu) + \sin(s+(p-1)u)}{2 - 2\cos u}$$
$$= \sin s + \sin(s+u) + \sin(s+2u) + \cdots + \sin(s+(p-1)u)$$

sein.
Q.E.I.

KOROLLAR 1

§6 Weil ja $\sin(s-u) = \sin s \cdot \cos u - \cos s \cdot \sin u$ ist, wird

$$\frac{\sin s - \sin(s-u)}{2 - 2\cos u} = \frac{\sin s}{2} + \frac{\cos s \cdot \sin u}{2(1-\cos u)} = \frac{\sin s}{2} + \frac{\cos s}{2\tan\frac{1}{2}u}$$

wegen

$$\frac{\sin u}{1-\cos u} = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}u}$$

sein; in gleicher Weise ist

$$\sin(s+(p-1)u) = \sin(s+pu)\cdot\cos u - \cos(s+pu)\cdot\sin u$$

und daher

$$\frac{-\sin(s+pu) + \sin(s+(p-1)u)}{2(1-\cos u)} = \frac{-\sin(s+pu)}{2} - \frac{\cos(s+pu)}{2\tan\frac{1}{2}u};$$

daher wird die Summe der vorgelegten Reihe

$$= \frac{\sin s - \sin(s+pu)}{2} + \frac{\cos s - \cos(s+pu)}{2\tan\frac{1}{2}u}$$

sein.

KOROLLAR 2

§7 Weil weiter $\tan\frac{1}{2}u = \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u}$ ist, wird die Summe der vorgelegten Reihe

$$= \frac{\cos(s - \frac{1}{2}u) - \cos(s + pu - \frac{1}{2}u)}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

sein. In dieser Reihe von Bogen ziehe man also vom ersten s die halbe Differenz $\frac{1}{2}u$ ab und addiere dieselbe zum letzten Bogen und den Kosinus der resultierenden Bogen von diesem ziehe man vom Kosinus von jenem ab und die Differenz durch den doppelten Sinus der halben Differenz geteilt wird die Summe aller Sinus jener eine arithmetische Progression bildender Bogen geben.

KOROLLAR 3

§8 Wenn der Halbkreis, dessen Radius $= 1$ ist, in n gleicher Teile geteilt wird, wird, nachdem der halbe Umfang $= \pi$ gesetzt worden ist, die Differenz $= \frac{\pi}{n}$ sein. Wenn also nun von den einzelnen Teilungspunkten aus die Sinus zum Durchmesser gezogen worden, wird wegen $s = \frac{\pi}{n}$, $u = \frac{\pi}{n}$ und $s + (p-1)u = \pi$ die Summe all dieser Sinus

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}$$

sein.

KOROLLAR 4

§9 Wenn also der Halbkreis ADG (Fig. 1)[1] in beliebig viele gleiche Teile AB, BC, CD etc. geteilt wird und von den einzelnen Teilungspunkten B, C, D, E etc. aus zum Durchmesser AG die Lote Bb, Cc, Dd, Ee und Ff gefällt worden sind, wird die Summe dieser Geraden zusammen genommen dem Kotangens der Hälfte eines Teils gleich werden, oder, nachdem der erste Teil AB in M geteilt und die Tangens AT dieser Hälfte AM gezeichnet worden ist, wird AT sich zum Radius verhalten wie der Radius zur zur Summe aller Sinus $Bb + Cc + De + Ee + Ff$, welches der Satz von VIETA ist.

[1] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

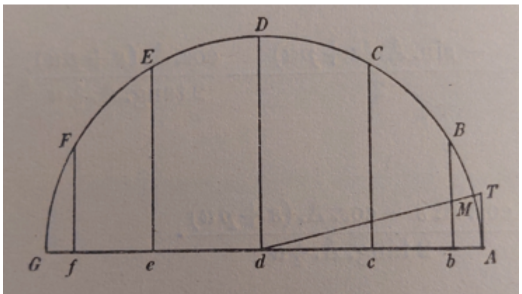

Fig. 1.

KOROLLAR 5

§10 Wenn in gleicher Weise irgendein Kreisbogen BG (Fig. 2)[2] in beliebig viele gleiche Teile BC, CD, DE etc. geteilt wird und von diesen einzelnen Punkten aus zum nach Belieben gezeichneten Durchmesser AOS die Lote Bb, Cc, $Dd \cdots Gg$ gefällt wird, werden diese Lote die Sinus der in einer arithmetischen Progression fortschreitenden Bogen AB, AC, $AD \cdots AG$, während $AB = s$, $BC = u$ ist, sein und $AG = s + (p-1)u$ sein.

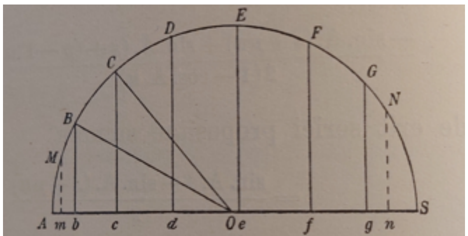

Fig. 2.

Wenn also auf beiden Seiten zum geteilten Bogen AG die Teile $BM = GN = \frac{1}{2}BC$ addiert werden und von da aus die Lote Mm und Nn gefällt werden, wird

$$Om = \cos\left(s - \frac{1}{2}u\right) \quad \text{und} \quad On = -\cos\left(s + \left(p - \frac{1}{2}\right)u\right)$$

sein. Aber die Strecke BC wird $= 2\sin\frac{1}{2}u$ sein. Aus diesen wird also die Summe aller Sinus $Bb + Cc + Dd + Ee + Ff + Gg$

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Version.

$$= \frac{Om + On}{BC} = \frac{mn}{BC}$$

sein, nachdem der Radius $OA = 1$ gesetzt worden ist. Wenn daher über der Basis mn ein gleichschenkliges Dreieck dem Dreieck BOC ähnlich konstruiert wird, welches die Strecke BC als Basis und das Zentrum O als Spitze hat, dann wird ein Schenkel dieses Dreiecks der Summe aller Sinus

$$Bb + Cc + Dd + Ee + Ff + Gg$$

gleich sein.

PROBLEM 2

§11 *Nachdem der Halbkreis in die gleichen Teile AB, BC, CD etc.* (Fig. 3)[3] *und nachdem die Sinus Bb, Cc, Dd, Ee etc. gezeichnet worden sind, betrachte man die rechtwinkligen Parallelogramme* $b\alpha$, $c\beta$, $d\gamma$, $e\delta$, $f\varepsilon$, $g\zeta$, $h\eta$, $i\vartheta$, $K\iota$, *die Summe all derer zusammengenommen bestimmt werden soll.*

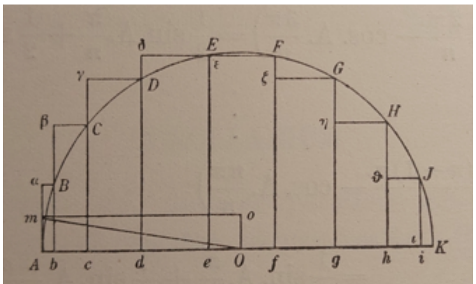

Fig. 3.

LÖSUNG

Nachdem der Radius $AO = 1$ und der Halbkreisumfang $= \pi$ gesetzt worden ist, sei er in n gleiche Teile geteilt; jeder einzelne Teil wird $AB = BC = CD =$ etc. $= \frac{\pi}{n}$ sein und daher

$$Bb = \sin\frac{\pi}{n}, \quad Cc = \sin\frac{2\pi}{n}, \quad Dd = \sin\frac{3\pi}{n} \quad \text{etc.}$$

[3]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

bis hin zum letzten Teilungspunkt K, für welchen der Sinus $= \sin\frac{n\pi}{n} = 0$ sein wird. Nun werden die Basen der Parallelogramme sein wie folgt:

$$Ab = 1 - \cos\frac{\pi}{n}, \qquad bc = \cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\pi}{n},$$
$$cd = \cos\frac{2\pi}{n} - \cos\frac{3\pi}{n}, \quad de = \cos\frac{3\pi}{n} - \cos\frac{4\pi}{n}$$

und die letzte Basis

$$iK = \cos\frac{(n-1)\pi}{n} - \cos\frac{n\pi}{n},$$

welcher die Höhe $= 0$ zukommt. Weil weiter allgemein

$$\sin\varphi \cdot \cos\psi = \frac{\sin(\varphi+\psi) + \sin(\varphi-\psi)}{2}$$

ist, werden sich die Flächen unserer Parallelogramme so verhalten:

$$\begin{aligned}
b\alpha &= \sin\frac{\pi}{n}\ \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) &&= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n} &&- \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n},\\
c\beta &= \sin\frac{2\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\pi}{n}\right) &&= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{n} &&- \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{n},\\
d\gamma &= \sin\frac{3\pi}{n}\left(\cos\frac{2\pi}{n} - \cos\frac{3\pi}{n}\right) &&= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{n} &&- \frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{n},\\
&&&\vdots\\
K\iota &= \sin\frac{n\pi}{n}\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - \cos\frac{n\pi}{n}\right) &&= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{n} &&- \frac{1}{2}\sin\frac{2n\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Also haben wir die drei Reihen, deren Summe wir ausfindig machen müssen, und freilich wird die Summe der ersten, all deren Terme $= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}$ sind, $= \frac{n}{2}\sin\frac{\pi}{n}$ sein. Die zweite Reihe verdoppelt ist

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \sin\frac{5\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{n},$$

welche an die vorhergehende Proposition angepasst

$$s = \frac{\pi}{n}, \quad u = \frac{2\pi}{n}, \quad s + (p-1)u = \frac{\pi}{n} + \frac{2(p-1)\pi}{n} = \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

gibt. Also wird ihre Summe

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \cos\frac{2n\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = 0$$

sein. Also ist die dritte Reihe zweimal genommen

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{2n\pi}{n},$$

welche also $s = \frac{2\pi}{n}$, $u = \frac{2\pi}{n}$ gibt, woher die Summe von selbiger

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{(2n+1)\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = 0$$

sein wird. Weil also die Summe der zweiten und dritten Reihe verschwinden, wird die gesuchte Summe aller Rechtecke

$$b\alpha + c\beta + d\gamma + e\delta + \cdots + K\iota = \frac{n}{2}\sin\frac{\pi}{n}$$

sein.
Q.E.I.

KOROLLAR

§12 Wenn also dem Durchmesser AK parallel die Strecke mo gezeichnet wird, welche den Tangens $A\alpha$ in m zweiteilt, und vom Mittelpunkt O aus die Senkrechte Oo gezeichnet wird, wird

$$Oo = Am = \frac{1}{2}Bb = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}$$

sein und daher wird wegen des Radius $AO = 1$ die Fläche des Rechtecks $OomA$ also $= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}$ sein; also wird das Rechteck sooft geteilt, wie es Teilungspunkte gibt oder die Zahl n Einheiten enthält, die Summe alle Rechtecke

$$b\alpha + c\beta + d\gamma + \text{etc.}$$

geben.

PROBLEM 3

§13 *Wenn irgendein Kreisbogen BH* (Fig. 4)[4] *in die gleichen Teile BC, CD, DE etc. geteilt wird und von den einzelnen Teilungspunkten aus zum nach Belieben gezeichneten Durchmesser die Lote Bb, Cc, Dd etc. gefällt werden und außerdem aus diesen die Parallelogramme* $c\beta$, $d\gamma$, $e\delta$, $f\varepsilon$, $g\zeta$, $h\eta$ *gebildet werden, die Fläche all dieser Parallelogramme zusammengenommen zu finden.*

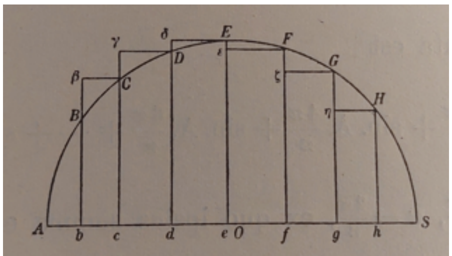

Fig. 4.

LÖSUNG

Der geteilte Bogen BH sei $= q$, die Anzahl der Teilung sei $= n$, sodass jeder Teil $BC = CD = DE$ etc. $= \frac{q}{n}$ sein wird. Außerdem sei der Bogen $AB = a$; es wird

$$Bb = \sin a, \quad Cc = \sin\left(a + \frac{q}{n}\right), \quad Dd = \sin\left(a + \frac{2q}{n}\right) \quad \text{etc.}$$

sein, der letzte hingegen

$$Hh = \sin\left(a + \frac{nq}{n}\right) = \sin(a+q).$$

Aus diesen werden sich die vorgelegten Rechtecke so verhalten:

[4] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$\begin{aligned}
c\beta &= \sin\left(a+\frac{q}{n}\right)\left(\cos a - \cos\left(a+\frac{q}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{q}{n}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{2q}{n}\right),\\
d\gamma &= \sin\left(a+\frac{2q}{n}\right)\left(\cos\left(a+\frac{q}{n}\right) - \cos\left(a+\frac{2q}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{3q}{n}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{4q}{n}\right),\\
e\delta &= \sin\left(a+\frac{3q}{n}\right)\left(\cos\left(a+\frac{2q}{n}\right) - \cos\left(a+\frac{3q}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{5q}{n}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{6q}{n}\right)\\
&\vdots\\
h\eta &= \sin(a+q)\left(\cos\left(a+\frac{(n-1)q}{n}\right) - \cos(a+q)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{1}{2}\sin\left(2a+\frac{(2n-1)q}{n}\right) - \frac{1}{2}\sin(2a+2q).
\end{aligned}$$

Es müssen also wiederum drei Reihen summiert werden, von welchen die Summe der ersten klar ist $= \frac{n}{2}\sin\frac{q}{n}$ zu sein. Die Summe der zweiten zu dieser zu addierenden ist nach Proposition 1

$$= \frac{\cos 2a - \cos(2a+2q)}{4\sin\frac{q}{n}};$$

die dritte zu subtrahierende Reihe ist

$$= \frac{\cos\left(2a+\frac{q}{n}\right) - \cos\left(2a+2q+\frac{q}{n}\right)}{4\sin\frac{q}{n}}.$$

Die Summe aller vorgelegten Rechtecke wird also

$$= \frac{n}{2} \sin \frac{q}{n} + \frac{\cos 2a - \cos\left(2a + \frac{q}{n}\right) - \cos(2a + 2q) + \cos\left(2a + 2q + \frac{q}{n}\right)}{4 \sin \frac{q}{n}}$$

$$= \frac{n}{2} \sin \frac{q}{n} + \frac{\sin \frac{q}{2n} \left(\sin\left(2a + \frac{q}{2n}\right) - \sin\left(2a + 2q + \frac{q}{2n}\right)\right)}{2 \sin \frac{q}{n}}$$

$$= \frac{n}{2} \sin \frac{q}{n} + \frac{\sin q \left(\sin(2a + q) - \sin\left(2a + q + \frac{q}{n}\right)\right)}{2 \sin \frac{q}{n}}$$

sein, welche Reduktionen auf das Fundament gestützt sind, nach welchem die Differenz der Kosinus zweier Winkel gleich dem doppelten Produkt aus dem Sinus der Halbsumme mit dem Sinus der halben Differenz derselben Winkel ist. Q.E.I.

Korollar 1

§14 Wenn der Durchmesser AS von jeder der beiden Enden des geteilten Bogens BH gleich weit entfernt ist, dass $AB = SH = a$ ist, wird $2a + q =$ dem halben Umfang, π, sein und daher

$$\sin(2a + q) = 0 \quad \text{und} \quad \sin\left(2a + q + \frac{q}{n}\right) = -\sin \frac{q}{n}$$

sein. In diesem Fall wird also die Summe aller Rechtecke

$$= \frac{n}{2} \sin \frac{q}{n} + \frac{1}{2} \sin q$$

sein.

Korollar 2

§15 Weil ja $\sin \frac{q}{n} = 2 \sin \frac{q}{2n} \cdot \cos \frac{q}{2n}$ ist, wird aus dem zweiten Ausdruck die Summe aller Rechtecke

$$= \frac{n}{2} \sin \frac{q}{n} + \frac{\sin\left(2a + \frac{q}{2n}\right) - \sin\left(2a + 2q + \frac{q}{2n}\right)}{4 \cos \frac{q}{2n}}$$

sein.

Korollar 3

§16 Wenn das andere Komplement des geteilten Bogens $SH = b$ gesetzt wird, wird

$$a + b + q = \pi \quad \text{und} \quad a = \pi - b - q$$

sein, welcher Wert im letzten Sinus eingesetzt die gesuchte Summe der Rechtecke

$$= \frac{n}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{\sin\left(2a + \frac{q}{2n}\right) + \sin\left(2b - \frac{q}{2n}\right)}{4\cos\frac{q}{2n}}$$

geben wird.

Korollar 4

§17 Dieser Ausdruck der gesuchten Summe kann auf diese Form reduziert werden

$$\frac{n}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{1}{4}\sin 2a + \frac{1}{4}\sin 2b + \frac{1}{4}\tan\frac{q}{2n}(\cos 2a - \cos 2b).$$

Und diese wird schließlich in diese überführt

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{1}{2}\sin(a+b)\cdot\cos(a-b) - \frac{1}{2}\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)\cdot\tan\frac{q}{2n}\\
&= \frac{n}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{\sin(a+b)\cdot\cos\left(a - b + \frac{q}{2n}\right)}{2\cos\frac{q}{2n}}\\
&= \frac{n}{2}\sin\frac{q}{n} + \frac{\sin q\cdot\cos\left(a - b + \frac{q}{2n}\right)}{2\cos\frac{q}{2n}}.
\end{aligned}$$

Problem 4

§18 *Die Summe dieser Reihe von Kosinus zu finden*

$$\cos s + \cos(s+u) + \cdots + \cos(s + (p-1)u),$$

deren Winkel s, $s+u$, $s+2u$, $\cdots$ $s+(p-1)u$ eine arithmetische Progression festlegen.

Lösung

Die Summe dieser Reihe von Kosinus kann genauso wie die der Sinus mithilfe von Lemma 1 gefunden werden, weil die Kosinus der in einer arithmetischen Progression fortschreitenden Winkel eine rekurrente Reihe bilden, deren Indizes $2\cos u$, -1 sind; es wird also

$$A = \cos s, \quad \Delta = \cos(s-u), \quad P = \cos(s+(p-1)u), \quad Q = \cos(s+pu)$$

und

$$m = 2\cos u, \quad n = -1$$

sein, aus welchen die Summe der vorgelegten Reihe

$$= \frac{\cos s - \cos(s-u) - \cos(s+pu) + \cos(s+(p-1)u)}{2 - 2\cos u}$$

sein wird. Weil aber

$$\cos(s-u) = \cos s \cdot \cos u + \sin s \cdot \sin u$$

und

$$\cos(s+pu-u) = \cos(s+pu)\cdot\cos u + \sin(s+pu)\cdot \sin u$$

ist, wird die Summe

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\cos s - \frac{\sin s}{2\tan\frac{1}{2}u} - \frac{1}{2}\cos(s+pu) + \frac{\sin(s+pu)}{2\tan\frac{1}{2}u} \\ &= \frac{-\sin(s-\frac{1}{2}u) + \sin(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u} \end{aligned}$$

sein. Q.E.I.

Scholion

§19 Dieselbe Summe der Kosinus kann aus der gefundenen Summe der Sinus leicht gefunden werden. Weil nämlich [§ 7]

$$\sin s + \sin(s+u) + \sin(s+2u) + \cdots + \sin(s+(p-1)u)$$

$$= \frac{\cos(s - \frac{1}{2}u) - \cos(s + (p - \frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

ist, differenziere man diese Gleichung nach s, während u konstant ist, und nach Teilen durch ds auf beiden Seiten wird

$$\cos s + \cos(s+u) + \cos(s+2u) + \cdots + \cos(s + (p-1)u)$$
$$= \frac{-\sin(s - \frac{1}{2}u) + \sin(s + (p - \frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u}$$

werden.

Korollar 1

§20 Nachdem also die Reihe der Kosinus vorgelegt worden ist, deren Winkel in einer arithmetischen Progression fortschreiten, ziehe man vom ersten Winkel die halbe Differenz der Progression ab und dieselbe halbe Differenz addiere man zum letzten Winkel. Dann subtrahiere man den Sinus jenes Winkels von Sinus von diesem und die Differenz durch den doppelten Sinus der halben Differenzen geteilt wird die Summe aller Kosinus geben.

Korollar 2

§21 Wenn der erste Winkel s verschwindet und der letzte $s + (p-1)u$ ein rechter wird, wird

$$-\sin\left(s - \frac{1}{2}u\right) = \sin\frac{1}{2}u \quad \text{und} \quad \sin\left(s + \left(p - \frac{1}{2}\right)u\right) = \cos\frac{1}{2}u$$

sein, woher die Summe der Kosinus dieser Reihe

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}u$$

sein wird.

Problem 5

§22 *Die Summe dieser Reihe von Sinus zu finden*

$$\alpha \sin s + (\alpha+\beta)\sin(s+u) + (\alpha+2\beta)\sin(s+2u)$$
$$+(\alpha+3\beta)\sin(s+3u) + \cdots + (\alpha+(p-1)\beta)\sin(s+(p-1)u),$$

deren Koeffizienten eine arithmetische Progression bilden, die Winkel aber gleichermaßen in einer arithmetischen Progression fortschreiten.

LÖSUNG

Weil aber die Sinus der eine arithmetische Progression bildenden Winkel eine rekurrente Reihe liefern, erstreckt sich dieser Fall auf Lemma 2 und es wird $m = 2\cos u$ und $n = -1$ sein. Weiter wird

$$A = \sin s, \quad \Delta = \sin(s-u), \quad P = \sin(s+(p-1)u) \quad \text{und} \quad Q = \sin(s+pu)$$

sein. Aus diesen Wird die Summe der vorgelegten Reihe

$$= \frac{\alpha(\sin s - \sin(s-u))}{2-2\cos u} - \frac{(\alpha+p\beta)(\sin(s+pu) - \sin(s+(p-1)u))}{2-2\cos u}$$
$$+\frac{2\beta(\cos u - 1)(\sin s - \sin(s+pu))}{4(1-\cos u)^2}$$
$$= \frac{\alpha}{2}\sin s + \frac{\alpha\cos s}{2\tan\frac{1}{2}u} - \frac{\alpha+p\beta}{2}\sin(s+pu)$$
$$-\frac{(\alpha+p\beta)\cos(s+pu)}{2\tan\frac{1}{2}u} - \frac{\beta\sin s - \beta\sin(s+pu)}{2(1-\cos u)}$$

gefunden werden. Diese Summe wird aus diese Form reduziert

$$= \frac{\alpha\cos(s-\frac{1}{2}s) - (\alpha+p\beta)\cos(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u} - \frac{\beta\sin s - \beta\sin(s+pu)}{2(1-\cos u)}.$$

Q.E.I.

Korollar 1

§23 Weil ja $1-\cos u = 2\left(\sin\frac{1}{2}u\right)^2$ ist, wird die Summe der vorgelegten Sinus auch

$$=\frac{\alpha\cos(s-\frac{1}{2}s)-(\alpha+p\beta)\cos(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u}-\frac{\beta\sin s-\beta\sin(s+pu)}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

sein.

Korollar 2

§24 Wenn also $\alpha=1$ und $\beta=1$ ist, wird die Summe dieser Reihe

$$\sin s+2\sin(s+u)+3\sin(s+2u)+\cdots+p\sin(s+(p-1)u)$$

auch

$$=\frac{\cos(s-\frac{1}{2}u)-(p+1)\cos(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u}-\frac{\sin s-\sin(s+pu)}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}$$

sein.

Scholion

§25 Diese selbe Reihe kann ohne Hilfe des Lemmas aus der zuvor gefundenen Summe der einfachen Kosinus mithilfe von Differentiation gefunden werden. Weil nämlich [§ 18]

$$\begin{aligned}\cos s+\cos(s+u)+\cos(s+2u)+\cdots+\cos(s+(p-1)u)\\ =\frac{-\sin(s-\frac{1}{2}u)+\sin(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u}\end{aligned}$$

ist, setze man $s=a+\alpha x$ und $u=\beta x$; es wird

$$\begin{aligned}\cos(a+\alpha x)+\cos(a+(\alpha+\beta)x)+\cos(a+(\alpha+2\beta)x)+\cdots\\ +\cos(a+(\alpha+(p-1)\beta)x)=\frac{-\sin(a+(\alpha-\frac{1}{2}\beta)x)+\sin(a+(\alpha+p\beta-\frac{1}{2}\beta)x)}{2\sin\frac{1}{2}\beta x}.\end{aligned}$$

Nun differenziere man diese Gleichung nach x und nach Teilung durch $-dx$ wird man

$$\begin{aligned}
&\alpha \sin s + (\alpha+\beta)\sin(s+u) + \cdots + (\alpha+(p-1)\beta)\sin(s+(p-1)u) \\
&= \frac{(\alpha-\frac{1}{2}\beta)\cos(s-\frac{1}{2}u) - (\alpha+(p-\frac{1}{2})\beta\cdot\cos(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u} \\
&\quad - \frac{\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}u\cdot\sin(s-\frac{1}{2}u) - \frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}u\cdot\sin(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2(\sin\frac{1}{2}u)^2}
\end{aligned}$$

haben, welcher Ausdruck leicht auf die zuerst gefundene zurückgeführt wird.

KOROLLAR 3

§26 Aus der gefundenen Summe der vorgelegten Reihe der Sinus wird per Ableitung nach s für konstantes u die gleiche Summe der Reihe der Kosinus entspringen

$$\begin{aligned}
&\alpha\cos s + (\alpha+\beta)\cos(s+u) + (\alpha+2\beta)\cos(s+2u) + \cdots \\
&\quad +(\alpha+(p-1)\beta)\cos(s+(p-1)u) \\
&= \frac{-\alpha\sin(s-\frac{1}{2}u)}{2\sin\frac{1}{2}u} + \frac{(\alpha+p\beta)\sin(s+(p-\frac{1}{2})u)}{2\sin\frac{1}{2}u} - \frac{\beta\cos s - \beta\cos(s+pu)}{4(\sin\frac{1}{2}u)^2}.
\end{aligned}$$

LEMMA 3

§27 *Das Integral dieser Differntialformel $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}}$, in welcher m eine Zahl kleiner als $2n$ ist, ist*

$$\mp\frac{1}{2n}\cos\frac{m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{\pi}{2n}}$$
$$\mp\frac{1}{2n}\cos\frac{3m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{3\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{3m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{3\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{3\pi}{2n}}$$
$$\mp\frac{1}{2n}\cos\frac{5m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{5\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{5m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{5\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{5\pi}{2n}}$$
$$\vdots$$
$$\mp\frac{1}{2n}\cos\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}},$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn m eine gerade Zahl war, die unteren aber, wenn m eine ungerade Zahl ist. Und das Integral ist so genommen, dass es für $x=0$ verschwindet.

KOROLLAR 1

§28 Das Integral dieser Differentialformel $\frac{x^{2n-m-1}dx}{1+x^{2n}}$ wird

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{\pi}{2n}}$$
$$\mp\frac{1}{2n}\cos\frac{3m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{3\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{3m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{3\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{3\pi}{2n}}$$
$$\vdots$$
$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\log\left(1+2x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}},$$

wo wiederum die oberen Vorzeichen gelten, wenn m eine gerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn m eine ungerade Zahl ist.

KOROLLAR 2

§29 Wenn also diese Differentialformeln addiert werden, werden sich die logarithmischen Größen in deren Integralen aufheben, die Kreisbogen werden aber verdoppelt werden und es wird daher sein

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{m-1}+x^{2n-m-1}}{1+x^{2n}}dx = \ & \mp + \frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{\pi}{2n}} \\ & \mp + \frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{3\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{3\pi}{2n}} \\ & \mp + \frac{2}{n}\sin\frac{5m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{5\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{5\pi}{2n}} \\ & \vdots \\ & \mp + \frac{2}{n}\sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\arctan\frac{x\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}}{1+x\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}},\end{aligned}$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn m eine gerade Zahl war, die unteren aber, wenn m ungerade ist; und es bezeichnet π stets den Bogen von 180° im Kreis, dessen Radius $= 1$ ist.

PROBLEM 6

§30 *Das Integral der Differentialformel* $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}}$ *in dem Fall zu finden, in dem nach der Integration* $x = \infty$ *gesetzt wird.*

LÖSUNG

Wenn in den logarithmischen Teilen des zuvor [§ 27] dargebotenen Integrals $x = \infty$ gesetzt wird, werden sie in

$$\mp \log\frac{x}{n}\left(\cos\frac{m\pi}{2n}+\cos\frac{3m\pi}{2n}+\cos\frac{5m\pi}{2n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\right)$$

übergehen; weil die Differenz dieser Bogen konstant $= \frac{2m\pi}{2n}$ ist, wird die Summe dieser Kosinus

$$= \frac{-\sin 0\pi + \sin\frac{2nm\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}} = 0$$

sein; obgleich also x unendlich ist, ist dennoch sein Logarithmus $\log x$ von kleinster Ordnung an Unendlichkeiten und daher wird $0 \log x = 0$. In diesem Fall $x = \infty$ heben sich im Integral alle von den Logarithmen abhängenden gegenseitig auf und es werden nur die anderen von der Quadratur des Kreises abhängenden Glieder zurückbleiben. Weil aber wegen des unendlichen x

$$\arctan \frac{x \sin \frac{k\pi}{2n}}{1 + x \cos \frac{k\pi}{2n}} = \arctan \frac{\sin \frac{k\pi}{2n}}{\cos \frac{k\pi}{2n}} = \frac{k\pi}{2n}$$

ist, wird das gesuchte Integral im Fall $x = \infty$

$$= \mp \frac{\pi}{2nn} \left\{ \begin{array}{c} \sin \frac{m\pi}{2n} + 3 \sin \frac{3m\pi}{2n} + 5 \sin \frac{5m\pi}{2n} + \cdots \\ + (2n-1) \sin \frac{(2n-1)m\pi}{2n} \end{array} \right\}$$

sein. Diese Reihe von Sinus wird durch Problem 5 zu einer Summe gesammelt werden können. Es wird aber

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad p = n, \quad \text{weiter} \quad s = \frac{m\pi}{2n}, \quad u = \frac{2m\pi}{2n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} u = \frac{m\pi}{2n}$$

sein, aus welchen die Summe dieser Reihe von Sinus berechnet wird

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - (2n+1) \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2n}} - \frac{2 \sin \frac{m\pi}{2n} - 2 \sin \frac{(2n+1)m\pi}{2n}}{4 \left(\sin \frac{m\pi}{2n} \right)^2} \\ &= \frac{\sin \left(m\pi + \frac{m\pi}{2n} \right)}{2 \left(\sin \frac{m\pi}{2n} \right)^2} - \frac{(2n+1) \cos m\pi}{2 \sin \frac{m\pi}{2n}} = \frac{-n \cos m\pi}{\sin \frac{m\pi}{2n}} \end{aligned}$$

zu sein. Wenn also nun m eine gerade Zahl war, wird $\cos m\pi = +1$ sein, wenn aber m eine ungerade Zahl ist, wird $\cos m\pi = -1$ sein. Mit doppeldeutigen Vorzeichen wird die obere Summe der Sinus so ausgedrückt werden, dass $= \mp \frac{n}{\sin \frac{m\pi}{2n}}$ ist, welche mit $\mp \frac{\pi}{2nn}$ multipliziert, egal ob m eine gerade oder ungerade Zahl ist, dieselbe Größe des gesuchten Integrals $= \frac{\pi}{2n \sin \frac{m\pi}{2n}}$ geben wird, und auf diesen Ausdruck wird das Integral dieser Formel $\frac{x^{m-1} dx}{1+x^{2n}}$ zurückgeführt, wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird.
Q.E.I.

KOROLLAR 1

§31 Es wird also

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein, wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt werden muss, wenn freilich q eine gerade Zahl und der Exponent p kleiner als der Exponent q war.

SCHOLION

§32 Damit aber klar wird, welchen Wert die Formel $\int \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$ haben wird, wenn q eine ungerade Zahl war und nach der Integration nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird, wollen wir $x = yy$ setzen und unsere Formel wird in diese übergehen $2\int \dfrac{y^{2p-1}dy}{1+y^{2q}}$; weil dieser Fall in dem vorgelegten enthalten ist, wird sein Wert für $y = \infty$, wonach zugleich x unendlich wird, $= 2 \cdot \frac{\pi}{2q\sin\frac{p\pi}{q}}$ sein; also wird auch

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein, wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird, wenn q eine ungerade Zahl war. Also wird allgemein, welche Zahlen auch immer p und q waren, solange $p-1$ kleiner ist als q, immer

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein. Es muss aber $p-1 < q$ sein, weil ansonsten das in Lemma 3 gegebene Integral nicht vollständig wäre, sondern darüber hinaus eines oder mehrere algebraische Glieder enthielte; deswegen wäre das Integral im Fall $x = \infty$ immer unendlich werden.

KOROLLAR 2

§33 Wenn wir $x = \frac{y}{(1-y^q)^{\frac{1}{q}}}$ setzen, wird $x = 0$ sein, wenn $y = 0$ ist, und $x = \infty$, wenn $y = 1$ gesetzt wird; aber dann wird

$$dx = \frac{dy}{(1-y^q)^{\frac{1+q}{q}}}, \quad 1+x^q = \frac{1}{1-y^q} \quad \text{und} \quad x^{p-1} = \frac{y^{p-1}}{(1-y^q)^{\frac{p-1}{q}}}$$

werden, woher

$$\frac{x^{p-1}dx}{1+x^q} = \frac{y^{p-1}dy}{(1-y^q)^{\frac{p}{q}}}$$

sein wird. Deshalb wird durch Integrieren

$$\int \frac{y^{p-1}dy}{(1-y^q)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\pi}{q \sin \frac{p}{q}\pi}$$

werden, wenn nach der Integration $y = 1$ gesetzt wird.

PROBLEM 7

§34 *Das Integral der Differentialformel $\frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k}$ im Fall zu finden, in dem nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird.*

LÖSUNG

Vermöge der Reduktion von Integralformeln wird

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \frac{x^p}{(k-1)q(1+x^q)^{k-1}} + \frac{(k-1)q-p}{(k-1)q} \int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^{k-1}}$$

sein; wenn also nach der Integration, wie wir annehmen, $x = \infty$ gesetzt wird, verschwindet wegen $p < q(k-1)$ das algebraische Glied und es wird

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \frac{(k-1)q-p}{(k-1)q} \int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^{k-1}}$$

sein. Wenn wir deshalb anstelle von k nacheinander die Zahlen 2, 3, 4, 5 etc. setzen, werden all diese Integralformeln auf diese zurückgeführt $\int \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$ werden, deren Wert wir gesehen haben im Fall $x = \infty = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$ zu sein, woher die folgenden Integrationen entstehen werden:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^2} = \frac{q-p}{q} \cdot \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}},$$

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^3} = \frac{(q-p)(2q-p)}{q \cdot 2q} \cdot \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}},$$

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^4} = \frac{(q-p)(2q-p)(3q-p)}{q \cdot 2q \cdot 3q} \cdot \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}},$$

etc.

Und daher wird allgemein gefolgert, dass

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \frac{(q-p)(2q-p)(3q-p)\cdots((k-1)q-p)}{q \cdot 2q \cdot 3q \cdots (k-1)q} \cdot \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein wird.
Q.E.I.

KOROLLAR 1

§35 Sooft also k eine positive ganze Zahl war, kann das Integral der Formel $\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k}$ im Fall, in dem $x = \infty$ ist, über die Peripherie des Kreises ausgedrückt werden.

KOROLLAR 2

§36 Aus meiner Dissertation *De progressionibus transcendentibus* in Tom. Comment. V. folgert man, dass

$$\frac{q \cdot 2q \cdot 3q \cdots (k-1)q}{(q-p)(2q-p)(3q-p)\cdots((k-1)q-p)} = (kq-p)\int y^{q-p-1}dy(1-y^q)^{k-1}$$

ist, wenn nach der Integration $y = 1$ gesetzt wird. Daher berechnet man also, dass

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} \cdot \int y^{q-p-1}dy(1-y^q)^{k-1} = \frac{\pi}{q(kq-p)\sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein wird.

KOROLLAR 3

§37 Wenn wir $x = \frac{y}{(1-y^q)^{\frac{1}{q}}}$ setzen, sodass für $y = 1$ gesetzt $x = \infty$ wird, wird

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{(1+x^q)^k} = \int y^{p-1}dy(1-y^q)^{\frac{(k-1)q-p}{q}}$$

werden; für $y = 1$ gesetzt wird

$$\frac{\pi}{q(kq-p)\sin\frac{p\pi}{q}} = \int y^{q-p-1}dy(1-y^q)^{k-1} \cdot \int y^{p-1}dy(1-y^q)^{\frac{(k-1)q-p}{q}}$$

werden. Aber es ist

$$\int y^{p-1}dy(1-y^q)^{\frac{(k-1)q-p}{q}} = \frac{kq}{kq-p}\int y^{p-1}dy(1-y^q)^{\frac{kq-p}{q}},$$

woher

$$\int y^{q-p-1}dy(1-y^q)^{k-1} \cdot \int y^{p-1}dy(1-y^q)^{\frac{kq-p}{q}} = \frac{\pi}{kqq\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein wird.

PROBLEM 8

§38 *Das Integral dieser Differentialformel*

$$\frac{x^{m-1}+x^{2n-m-1}}{1+x^{2n}}dx$$

im Fall, in welchem nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird, zu finden.

LÖSUNG

Wir haben das Integral dieser Differentialformel im Allgemeinen in § 29 dargeboten. Nachdem aber $x = 1$ gesetzt worden ist, geht jede von der Quadratur des Kreises abhängende Form, $\arctan\frac{x\sin\varphi}{1+x\cos\varphi}$, in $\frac{\varphi}{2}$ über. Daher wird das Integral der vorgelegten Formel im Fall $x = 1$

$$= \mp \frac{\pi}{2nn} \left\{ \begin{array}{c} \sin \frac{m\pi}{2n} + 3\sin \frac{3m\pi}{2n} + 5\sin \frac{5m\pi}{2n} + \cdots \\ +(2n-1)\sin \frac{(2n-1)m\pi}{2n} \end{array} \right\}$$

sein, welches jene Reihe von Sinus ist, welche wir in der Lösung von Problem 6 auf eine bestimmte Summe zurückgeführt haben, wo in gleicher Weise die oberen Vorzeichen gelten werden, wenn m eine gerade Zahl war, die unteren, wenn m eine ungerade Zahl ist. In jedem der beiden Fälle, ob m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, wird das gesuchte Integral dasselbe sein wie in Problem 6; wenn natürlich nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist, wird

$$\int \frac{x^{m-1} + x^{2n-m-1}}{1 + x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{m\pi}{2n}}$$

sein.
Q.E.I.

KOROLLAR 1

§39 Es wird also

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^{q}} dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{m\pi}{2n}}$$

sein, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird und wenn der Exponent $p - 1$ natürlich kleiner als der Exponent q war, wie wir oben angemerkt haben.

SCHOLION

§40 Mit derselben Methode, die wir oben (§ 32) verwendet haben, kann gezeigt werden, dass derselbe Wert des Integrals Geltung hat, obgleich q eine ungerade Zahl ist; es sei nämlich in der Formel $\int \frac{x^{p-1}+x^{q-p-1}}{1+x^{q}} dx$ der Exponent q eine ungerade Zahl und wir wollen $x = yy$ setzen; die vorherige Formel wird in diese übergehen $2 \int \frac{y^{2p-1} + y^{2q-2p-1}}{1 + y^{2q}} dy$, deren Integral im Fall $y = 1$ natürlich

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein wird; also wird, ob q eine gerade oder eine ungerade Zahl ist,

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein.

KOROLLAR 2

§41 Also werden die Integrale dieser zwei Differentialformeln

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1 + x^q} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx,$$

wenn in der ersten nach der Integration $x = \infty$, in der zweiten aber $x = 1$ gesetzt wird, einander gleich sein; in jedem der beiden Fälle ist nämlich das Integral

$$= \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein.

KOROLLAR 3

§43 Wenn im Integral

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$$

nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird, wird sein Wert

$$= \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}} + \frac{\pi}{q \sin \frac{(q-p)\pi}{q}} = \frac{2\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein; dieses Integral ist also doppelt so groß, wenn $x = \infty$ gesetzt wird, wie dasselbe, wenn $x = 1$ gesetzt wird.

LEMMA 4

§43 *Das Integral dieser Differentialformel* $\frac{x^{m-1}dx}{1-x^{2n}}$, *in welcher* $m - 1$ *eine Zahl kleiner als* $2n$ *ist, ist*

$$\pm\frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{2n}$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{\pi}{n}+xx\right)\pm\frac{1}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1+x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{2m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{2\pi}{n}+xx\right)\pm\frac{1}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{1+x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{3m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{3\pi}{n}+xx\right)\pm\frac{1}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1+x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$\vdots$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+xx\right)\pm\frac{1}{n}\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{1+x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn m eine ungerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn m eine gerade Zahl war.

KOROLLAR 1

§44 Daher wird das Integral dieser Differentialformel $\frac{x^{2n-m-1}dx}{1-x^{2n}}$ das folgende sein

$$\pm\frac{1}{2n}\log(1+x)\mp\log(1-x)$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{\pi}{n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1+x\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{2m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{2\pi}{n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{1+x\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\pm\frac{1}{2n}\cos\frac{3m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{3\pi}{n}+xx\right)\mp\frac{1}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1+x\cos\frac{3\pi}{n}}$$

$$\vdots$$

$$\mp\frac{1}{2n}\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\log\left(1+2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+xx\right)\pm\frac{1}{n}\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{1+x\cos\frac{(n-1=\pi}{n}},$$

wo wiederum die oberen Vorzeichen Geltung haben, wenn m eine ungerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn m eine gerade Zahl ist.

KOROLLAR 2

§45 Wenn also diese letzte Formel von der ersten abgezogen wird, werden sich die logarithmischen Terme gegenseitig aufheben und das Integral dieser Formel $\frac{x^{m-1}-x^{2n-m-1}}{1-x^{2n}}dx$ wird sein:

$$\begin{aligned}
&= \pm\frac{2}{n}\sin\frac{m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{\pi}{n}}{1+x\cos\frac{\pi}{n}} \\
&\pm\frac{2}{n}\sin\frac{2m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{2\pi}{n}}{1+x\cos\frac{2\pi}{n}} \\
&\pm\frac{2}{n}\sin\frac{3m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{3\pi}{n}}{1+x\cos\frac{3\pi}{n}} \\
&\vdots \\
&\pm\frac{2}{n}\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\arctan\frac{x\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{1+x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}},
\end{aligned}$$

wo sich der Wert der zweideutigen Vorzeichen verhält wie zuvor.

PROBLEM 9

§46 *Das Integral dieser Differentialformel $\frac{x^{m-1}-x^{2n-m-1}}{1-x^{2n}}dx$ in dem Fall zu finden, in welchem nach ausgeführter Integration $x=1$ gesetzt wird.*

LÖSUNG

Weil im Fall $x=1$ ja $\arctan\frac{x\sin\varphi}{1+x\cos\varphi} = \arctan\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$ ist, wird das gesuchte Integral

$$= \pm\frac{\pi}{nn}\left(\sin\frac{m\pi}{n} + 2\sin\frac{2m\pi}{n} + 3\sin\frac{3m\pi}{n} + \cdots + (n-1)\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right)$$

sein, wo das obere $+$ des mehrdeutigen Vorzeichens gilt, wenn m eine ungerade Zahl ist, das untere hingegen, wenn m gerade ist. Die Summe dieser Reihe von Sinus wird also mit Problem 5 gefunden werden und nach einer Anwendung wird

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad p = n-1, \quad s = \frac{m\pi}{n}, \quad u = \frac{m\pi}{n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}u = \frac{m\pi}{2n}$$

sein; daher wird die gesuchte Summe

$$= \frac{\cos\frac{m\pi}{2n} - n\cos\left(m\pi - \frac{m\pi}{2n}\right)}{2\sin\frac{m\pi}{2n}} - \frac{\sin\frac{m\pi}{n} - \sin m\pi}{4\left(\sin\frac{m\pi}{2n}\right)^2}$$

sein. Weil aber

$$\sin\frac{m\pi}{n} = 2\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\cos\frac{m\pi}{2n}, \quad \sin m\pi = 0$$

und

$$\cos\left(m\pi - \frac{m\pi}{2n}\right) = \cos m\pi \cdot \cos\frac{m\pi}{2n}$$

ist, wird die Summe der gefundenen Reihe von Sinus

$$= \frac{-n\cos m\pi\cdot\cos\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}} = \pm\frac{n\cos\frac{m\pi}{2n}}{2\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

sein, wo wie zuvor das obere Vorzeichen Geltung hat, wenn m eine ungerade Zahl ist, das untere hingegen, wenn m eine gerade Zahl ist. Auf diese Weiese wird die Mehrdeutigkeit der Vorzeichen beseitigt und das Integral der vorgelegten Differentialformel wird im Fall $x = 1$, ob m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, durchgehend

$$= \frac{\pi\cos\frac{m\pi}{2n}}{2n\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

sein.
Q.E.I.

Korollar 1

§47 Wenn also nach der so durchgeführten Integration, dass das Integral für $x = 0$ gesetzt verschwindet, $x = 1$ gesetzt wird, wird

$$\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q}dx = \frac{\pi\cos\frac{p\pi}{q}}{q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein, wenn freilich q eine gerade Zahl war.

KOROLLAR 2

§48 Dieselbe Integration wird also zumindest im Fall $x = 1$ auch Geltung haben, wenn q eine ungerade Zahl war, weil für $x = yy$ gesetzt der Exponent von y im Nenner gerade gemacht wird. Also wird allgemein, wenn nach der Integration $x = 1$ gesetzt wird,

$$\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx = \frac{\pi \cos \frac{p\pi}{q}}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

sein.

KOROLLAR 3

§49 Weil in gleicher Weise nach der Integration $x = 1$ [§ 39]

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q+p-1}}{1 + x^q} dx = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

ist, wird, wenn jene durch diese geteilt wird,

$$\int \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} dx = \cos \frac{p\pi}{q} \cdot \int \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} dx$$

sein, wenn freilich nach jeder der beiden Integration $x = 1$ gesetzt wird.

LEMMA 5

§50 *Das Integral dieser Differentialformel*

$$\frac{x^{m-1} dx}{1 - 2hx^n + x^{2n}},$$

wenn n als eine gerade Zahl festgelegt und $n - m = i$ gesetzt wird und ebenso der Winkel ω genommen wird, dessen Kosinus $= h$ ist, wird der folgende Ausdruck sein

$$
\begin{aligned}
&\pm\frac{\sin\frac{i}{n}\omega}{2n\sin\omega}\log\left(1+2x\cos\tfrac{\omega}{n}+xx\right)+\frac{\cos\frac{i}{n}\omega}{n\sin\omega}\arctan\frac{x\sin\frac{\omega}{n}}{1+x\cos\frac{\omega}{n}}\\
&\pm\frac{\sin\frac{i}{n}(2\pi+\omega)}{2n\sin\omega}\log\left(1+2x\cos\tfrac{2\pi+\omega}{n}+xx\right)+\frac{\cos\frac{i}{n}(2\pi+\omega)}{n\sin\omega}\arctan\frac{x\sin\frac{2\pi+\omega}{n}}{1+x\cos\frac{2\pi+\omega}{n}}\\
&\pm\frac{\sin\frac{i}{n}(4\pi+\omega)}{2n\sin\omega}\log\left(1+2x\cos\tfrac{4\pi+\omega}{n}+xx\right)+\frac{\cos\frac{i}{n}(4\pi+\omega)}{n\sin\omega}\arctan\frac{x\sin\frac{4\pi+\omega}{n}}{1+x\cos\frac{4\pi+\omega}{n}}\\
&\vdots\\
&\pm\frac{\sin\frac{i}{n}(2(n-1)\pi+\omega)}{2n\sin\omega}\log\left(1+2x\cos\tfrac{2(n-1)\pi+\omega}{n}+xx\right)+\frac{\cos\frac{i}{n}(2(n-1)\pi+\omega)}{n\sin\omega}\arctan\frac{x\sin\frac{2(n-1)\pi+\omega}{n}}{1+x\cos\frac{2(n-1)\pi+\omega}{n}},
\end{aligned}
$$

wo die oberen Vorzeichen gelten, wenn i eine ungerade Zahl ist, die unteren hingegen, wenn i eine gerade Zahl ist. Wenn aber n eine ungerade Zahl war, dann muss nicht nur dieses Gesetz der Vorzeichen verändert werden, sondern es muss auch für ω der Winkel genommen werden, dessen Kosinus $=-h$ ist.

PROBLEM 10

§51 *Das Integral dieser Differentialformel*

$$\frac{x^{m-1}dx}{1-2hx^n+x^{2n}}$$

in dem Fall zu finden, in dem nach der Integration $x=\infty$ gesetzt wird.

LÖSUNG

Das allgemein genommene Integral besteht aus zwei Reihen von Anteilen: Die eine umfasst logarithmische Glieder, die andere von der Quadratur des Kreises abhängende Glieder. Wir wollen annehmen, dass n eine gerade Zahl ist und wir wollen $n-m=i$ setzen und es sei ω der Bogen, dessen Kosinus $=h$ ist. Nachdem nun $x=\infty$ gesetzt worden ist, werden die Logarithmen in $\log x^2 = 2\log x$ übergehen und daher wird die Summe der logarithmischen Glieder

$$\frac{\pm\log x}{n\sin\omega}\left(\sin\frac{i}{n}\omega+\sin\frac{i}{n}(2\pi+\omega)+\cdots+\sin\frac{i}{n}(2(n-1)\pi+\omega)\right)$$

sein, die Summe all welcher Sinus

$$= \frac{\cos \frac{i}{n}(\omega - \pi) - \cos \frac{i}{n}((2n-1)\pi + \omega)}{2 \sin \frac{i\pi}{n}}$$

gefunden wird; weil aber diese Winkel vom ganzen Umfang 2π einige Male genommen abweichen, werden deren Kosinus gleich und daher die Summe aller logarithmischen Terme im Integral $= 0$ sein. Es werden also nur die von der Quadratur des Kreises abhängenden Glieder übrig bleiben, welche sich im Fall $x = \infty$ so verhalten werden:

$$\pm \frac{1}{nn \sin \omega} \left\{ \begin{gathered} \omega \cos \frac{i}{n}\omega + (2\pi + \omega) \cos \frac{i}{n}(2\pi + \omega) + (4\pi + \omega) \cos \frac{i}{n}(4\pi + \omega) \\ + \cdots + (2(n-1)\pi + \omega) \cos \frac{i}{n}(2(n-1)\pi + \omega) \end{gathered} \right\}.$$

Diese Reihe von Kosinus wird nach § 26 summiert werden und nach einem Vergleich wird

$$\alpha = \omega, \quad \beta = 2\pi, \quad s = \frac{i\omega}{n}, \quad u = \frac{2i\pi}{n} \quad \text{und} \quad p = n$$

sein, woher die Summe dieser Kosinus als

$$= \frac{-\omega \sin \frac{i}{n}(\omega - \pi) + (\omega + 2n\pi) \sin \frac{i}{n}(\omega + (2n-1)\pi)}{2 \sin \frac{i\pi}{n}}$$
$$- \frac{\pi \cos \frac{i\omega}{n} - \pi \cos \frac{i}{n}(\omega + 2n\pi)}{2 \left(\sin \frac{i\pi}{n}\right)^2} = \frac{n\pi \sin \frac{i}{n}(\omega - \pi)}{\sin \frac{i\pi}{n}}$$

erhalten werden wird. Das gesuchte Integral ist also

$$= \pm \frac{\pi \sin \frac{i}{n}(\omega - \pi)}{n \sin \omega \cdot \sin \frac{i\pi}{n}};$$

nachdem aber die Mehrdeutigkeit der Vorzeichen beseitigt worden ist, wird das Integral der vorgelegten Differentialformel im Fall $x = \infty$ dieses sein

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{1 - 2hx^n + x^{2n}} = \frac{\pi \sin \frac{i}{n}(\pi - \omega)}{n \sin \omega \cdot \sin \frac{i\pi}{n}},$$

während $i = n - m$ und $\omega = \arccos h$ ist. Q.E.I.

Korollar 1

§52 Wenn $2n - m$ anstelle von m geschrieben wird, dann wird i in sein Negatives übergehen, wovon das Integral selbst nicht betroffen ist; es wird also

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1-2hx^n+x^{2n}} = \int \frac{x^{2n-m-1}dx}{1-2hx^n+x^{2n}}$$

im Fall $x = \infty$ sein.

Korollar 2

§53 Wenn $m = n$ wird, dann wird $i = 0$ sein; weil in diesem Fall diese Sinus verschwindender Bogen den Bogen selbst gleich sind, wird

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{1-2hx^n+x^{2n}} = \frac{\pi - \omega}{n \sin \omega}$$

werden, nachdem $x = \infty$ gesetzt worden ist; die Gültigkeit dessen kann leicht überprüft werden.

Scholion

§54 Wir haben hier angenommen, dass h eine Zahl kleiner als die Einheit oder ein ganzer Sinus ist; ansonsten wäre kein Bogen ω gegeben, dessen Kosinus $= h$ ist. Ich habe aber diesen Fall vor den übrigen ausgewählt, weil der Nenner $1 - 2hx^n + x^{2n}$ nicht in zwei reelle binomiale Faktoren aufgelöst werden kann. Sooft nämlich eine Auflösung solcher Art Geltung hat, kann die Aufgabe leichter vermöge des Vorhergehenden erledigt werden.

Problem 11

§55 *Das Integral dieser Differentialformel*

$$\frac{x^{p-1}dx}{1+ax^q}$$

in nur dem Fall zu finden, in welchem nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird.

Lösung

Man setze $ax^q = y^q$ oder $x = a^{-\frac{1}{q}}y$, wonach die vorgelegte Formel in diese übergehen wird $\frac{a^{\frac{-p}{q}}y^{p-1}dy}{1+y^q}$, deren Integral im Fall $y = \infty = \frac{\pi}{a^{\frac{p}{q}}q\sin\frac{p\pi}{q}}$ ist. Weil aber für $y = \infty$ zugleich $x = \infty$ wird, wird auch in diesem Fall

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+ax^q} = \frac{\pi}{a^{\frac{p}{q}}q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein.
Q.E.I.

Korollar 1

§56 Es wird also für irgendein Vielfaches

$$\int \frac{mx^{p-1}dx}{1+ax^q} = \frac{m\pi}{a^{\frac{p}{q}}q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

sein, wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird.

Korollar 2

§57 Weil also in gleicher Weise

$$\int \frac{nx^{p-1}dx}{1+bx^q} = \frac{n\pi}{b^{\frac{p}{q}}q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

ist, wird durch Addieren von zwei Formeln dieser Art

$$\int \frac{(m+n)x^{p-1}dx + (mb+na)x^{p+q-1}dx}{1+(a+b)x^q+abx^{2q}} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}\left(\frac{m}{a^{\frac{p}{q}}} + \frac{n}{b^{\frac{p}{q}}}\right)$$

sein, wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt worden ist.

Problem 12

§58 *Wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird, den Wert dieses Integrals zu finden*

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+2fx^q+gx^{2q}}.$$

LÖSUNG

Nachdem diese Formel mit dem vorhergehenden Korollar verglichen worden ist, wird $2f = a + b$ und $g = ab$ werden, woher $2\sqrt{ff-g} = a - b$ und daher

$$a = f + \sqrt{ff-g} \quad \text{und} \quad b = f - \sqrt{ff-g}$$

ist. Weiter wird aber $m + n = 1$ und $mb + na = 0$ oder $(m + n)f = (m - n)\sqrt{ff-g}$ und daher $m - n = \frac{f}{\sqrt{ff-g}}$ sein. Es wird also

$$m = \frac{f+\sqrt{ff-g}}{2\sqrt{ff-g}} \quad \text{und} \quad n = \frac{-f+\sqrt{ff-g}}{2\sqrt{ff-g}}$$

sein. Nachdem also diese Werte gefunden worden sind, wird man das gesuchte Integral

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{1+2fx^q+gx^{2q}} = \frac{\pi}{2q\sin\frac{p\pi}{q}} \cdot \frac{(f+\sqrt{ff-g})^{\frac{q-p}{q}} - (f-\sqrt{ff-q})^{\frac{q-p}{q}}}{\sqrt{ff-g}}$$

erhalten, wenn nach der Integration $x = \infty$ gesetzt wird. Q.E.I.

KOROLLAR 1

§59 Wenn also f und g positive reelle Größen waren und $ff > g$ war, dann wird das gefundene Integral in reellen Termen ausgedrückt sein. Wenn aber g eine negative Größe war, dann wird b negativ sein und in diesem Fall kann das gefundene Integral nicht Geltung haben. Derselbe Umstand tritt auf, wenn f eine negative Zahl war, während $ff > g$ war; denn dann werden a und b negative Zahlen werden und deshalb werden die Integrale der einfachen Formeln $\frac{x^{p-1}dx}{1-ax^q}$ und $\frac{x^{p-1}dx}{1-bx^q}$ im Fall $x = \infty$ nicht dargeboten werden können.

KOROLLAR 2

§60 Wenn aber $g > ff$ ist, dann wird jede der beiden Größen a und b imaginär werden; wenn also die imaginären Größen sich im gefundenen

Integral nicht aufheben, wird der Wert der vorgelegten Formeln im Fall $x = \infty$ nicht dargeboten worden können.

SCHOLION

§61 Wir wollen also festlegen, dass $g > ff$ ist und es sei ω der Winkel, dessen Kosinus $= \frac{f}{\sqrt{g}}$ ist; es wird

$$\frac{\sqrt{ff-g}}{\sqrt{g}} = \sin\omega \cdot \sqrt{-1}$$

sein und daher

$$(f + \sqrt{ff-g})^{\frac{q-p}{q}} = (\cos\omega + \sqrt{-1}\cdot\sin\omega)^{\frac{q-p}{q}} g^{\frac{q-p}{2q}}$$

und

$$(f - \sqrt{ff-g})^{\frac{q-p}{q}} = (\cos\omega - \sqrt{-1}\cdot\sin\omega)^{\frac{q-p}{q}} g^{\frac{q-p}{2q}}.$$

Aber es ist

$$(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\omega)^{\frac{q-p}{q}} = \cos\frac{(q-p)\omega}{q} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{(q-p)\omega}{q}.$$

Aus diesen wird das Integral der vorgelegten Formel

$$\frac{x^{p-1}dx}{1+2fx^q+gx^{2g}}$$

im Fall $g > ff$, wenn $x = \infty$ gesetzt wird,

$$= \frac{\pi}{g^{\frac{p}{2q}} q \sin\frac{p\pi}{q}} \cdot \frac{\sin\frac{(q-p)\omega}{q}}{\sin\omega}$$

sein, während

$$\cos\omega = \frac{f}{\sqrt{g}}$$

ist. Wenn wir $\pi - \omega$ anstelle von ω und i anstelle von $q-p$ und n anstelle q schreiben, stimmt das mit dem für denselben Fall in Problem 10 gefundenen Integral überein.